



## **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez**

Instituto de Ingeniería y Tecnología  
Departamento de Física y Matemáticas  
Maestría en Matemática Educativa y Docencia

### **“Cuando el futuro alcanzó a los exámenes: Reactivos diseñados para evaluar el conocimiento algebraico utilizando las TIC”**

Tesis para obtener el grado de Maestra en  
Matemática Educativa y Docencia

Ing. Betsabé Quintero Segura

“Becada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología”

**Bajo la Dirección del  
M. en C. Juan de Dios Viramontes Miranda**

Ciudad Juárez, Chihuahua, Noviembre de 2020

Esta investigación cualitativa surgió de la creciente incorporación de Tecnologías de la Información y la Comunicación (referido por sus siglas como TIC) en la educación matemática. El número de investigaciones sobre el impacto y aplicaciones tecnológicas dentro del aula ha ido en aumento (Ronau et al., 2014). Sin embargo, existen pocas investigaciones dedicadas a estudiar la relación entre la tecnología y los métodos de evaluación (Drijvers, 2015; Bano et al., 2018). Es una contradicción que las técnicas de evaluación no concuerden con las actividades tecnológicas del aula, porque puede insinuar que el uso de la tecnología no es importante en el aprendizaje matemático. Para hacer una evaluación adecuada del aprendizaje, es necesario contar con instrumentos que faciliten la comunicación y manifestación del conocimiento que poseen los estudiantes. Debido a que muchos cálculos y algoritmos son posibles realizarlos de manera automática con ayuda de la tecnología, los estudiantes pueden obtener respuestas sin que necesariamente conozcan el procedimiento o significado de las mismas.

## 2. Objetivos, Preguntas y Justificación

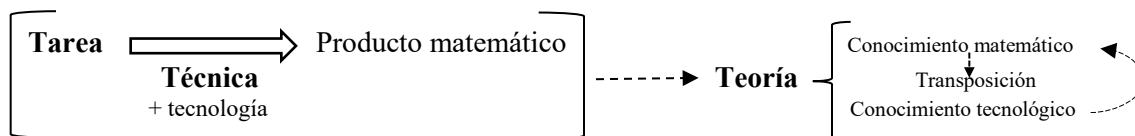
Drijvers (2015) identifica el diseño de los reactivos como uno de los factores cruciales para la eficaz integración de la tecnología durante el proceso de evaluación. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es definir qué tipos de reactivos permiten hacer evaluaciones utilizando herramientas TIC. Se elige como enfoque la evaluación del conocimiento algebraico ya que es el núcleo de las matemáticas a nivel bachillerato. Las preguntas de investigación que se pretenden contestar son: ¿Cuáles son los reactivos más apropiados para evaluar el conocimiento algebraico de los estudiantes si se les permite acceso a recursos tecnológicos? ¿Qué características deben tener los ejercicios algebraicos para que la utilización de tecnología demuestre la comprensión y conocimiento de los estudiantes?

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (referida en adelante como TAD por sus siglas) fue el marco teórico elegido para fundamentar el diseño y análisis de esta investigación. De acuerdo con Gascón y Bosch (2014), la TAD postula que cualquier actividad humana, incluida la enseñanza y aprendizaje, puede ser modelada bajo una praxeología. El término praxeología se compone por dos palabras en griego: *praxis*, que describe la parte práctica de la actividad; y *logos*, que refiere al razonamiento y pensamiento humano. Praxeología es la declaración de que cualquier actividad humana está razonada o justificada de alguna manera. La *praxis* engloba los tipos de *tareas* que contienen el objeto de conocimiento y el conjunto de *técnicas* o métodos utilizados para realizar dichas tareas. Por el otro lado, el *logos* abarca las justificaciones de la práctica: la *tecnología* que explica el trabajo realizado y la técnica empleada, y la *teoría* que justifica la tecnología seleccionada.

Cuando inicialmente se desarrolló la TAD, no se consideraba la presencia de la tecnología como parte de las condiciones para un aula tradicional. Artigue (2002) propuso una actualización a la TAD donde se reserva el término *tecnología* al uso de herramientas e instrumentos tecnológicos durante el aprendizaje. Como podemos ver en la Figura 1, bajo este esquema alternativo, ella reduce el total de componentes de una praxeología a sólo “tres Ts” (*tarea*, *técnica* y *teoría*). Una consecuencia de la presencia tecnológica es que añade nuevos instrumentos para realizar el trabajo matemático en el aula. Estos instrumentos impactan directamente las *técnicas* empleadas e incluso pueden modificar su valor pragmático al facilitar la producción de resultados, y su valor epistémico al alterar el nivel de razonamiento matemático requerido y desarrollado. El componente *teoría* también amplía su definición ya que ahora debe explicar y vincular tres conocimientos: el conocimiento matemático, el conocimiento del instrumento tecnológico y el conocimiento sobre la transposición que sufre el conocimiento matemático con el uso del instrumento.

**Figura 1**

Esquema de la actualización a la TAD propuesta por Michéle Artigue.



*Nota.* Adaptado de “Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique-theory perspective” (p. 18), por F. Hitt y C. Kieran, 2009, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14 (2).

Gascón y Bosch (2014) señalan que el objetivo de las praxeologías es analizar las condiciones que permitieron los procesos de enseñanza y aprendizaje, y confrontar las observaciones con las actividades que sucedieron y no sucedieron. Bosch (2015) sugiere que la modelación mediante praxeologías TAD puede servir como una herramienta para analizar el tipo de algebra que está siendo enseñada y aprendida dentro las instituciones educativas. Las praxeologías también ayudan a identificar los conceptos que están siendo omitidos de la didáctica, cuestionar las razones de su ausencia y el origen de dichas razones.

#### 4. Diseño Metodológico

Para lograr el objetivo de esta investigación, se sigue una metodología cualitativa para caracterizar los reactivos para la evaluación del conocimiento algebraico. Como podemos ver en la Tabla 1, se creó una matriz que combina las cuatro características del álgebra de Drijvers (2004) y los tres niveles de aplicación algebraica de Kieran (2006). Kilpatrick (2013) recomienda aprovechar que la tecnología facilita la realización de cálculos y transformaciones para dirigir la evaluación a aspectos matemáticos como el razonamiento, la modelación y la argumentación. Estos aspectos refieren a una actividad algebraica de alto nivel pertenecientes a la tercera columna de la matriz, identificados con las letras el A, B, C y D.

**Tabla 1**

*Matriz de doce categorías para los conocimientos y habilidades algebraicas.*

		Clasificación propuesta por Kieran (2006) basada en los niveles de aplicación del álgebra		
		Actividad generadora Representación de situaciones, patrones y relaciones mediante expresiones o ecuaciones que empleen variables e incógnitas.	Actividad transformadora Operaciones que cambian una expresión o ecuación a otra equivalente (factorización, expansión, simplificación, sustitución, adición, etc.).	Actividad global/meta Actividades que pueden abordarse sin álgebra, pero proveen contexto y sentido de propósito al álgebra (resolver, modelar, analizar relaciones, justificar, probar o predecir).
Clasificación propuesta por Drijvers (2004) basada en las características del álgebra	<b>Enfoque de resolución de problemas</b> Álgebra como un recurso para resolver problemas y ecuaciones.			A
	<b>Enfoque funcional</b> Álgebra como un recurso para estudiar las funciones y relaciones entre variables.			B
	<b>Enfoque generalizador</b> Álgebra como un recurso para estudiar patrones y estructuras, percibiendo a las variables como números generalizados.			C
	<b>Enfoque lingüístico</b> Mayor importancia al lenguaje algebraico, sus sistemas de representación, sintaxis, simbologías y notaciones.			D

*Nota.* Modelo generado a partir de la combinación de las características del álgebra propuestas por Drijvers (2004) y los niveles de aplicación del álgebra propuestos por Kieran (2006).

Adicionalmente considerando las clasificaciones de Lithner (2008), razonamiento algorítmico y razonamiento creativo matemático, se contemplaron diseñar dos diferentes tipos de problemas algebraicos para las cuatro categorías. En el problema Tipo 1 se aborda el razonamiento algorítmico y su propósito es evaluar la identificación e implementación de una estrategia o algoritmo que solucione el problema. El reactivo incluye explícitamente la expresión algebraica que deberá ser manipulada, analizada y/o resuelta por el participante. En el problema Tipo 2 se aborda el razonamiento creativo matemático. El reactivo no incluye la expresión algebraica por lo que la relación algebraica que deberá ser manipulada, analizada y/o resuelta por el participante está implícita en el planteamiento. En la Tabla 2 se muestran los ocho reactivos finales que se aplicaron en la investigación.

Reactivos utilizados en la investigación para cada una de las categorías algebraicas.

	Problema Tipo 1 planteamiento contiene una expresión algebraica explícita	Problema Tipo 2 relación algebraica está implícita en el planteamiento
<b>Categoría A</b> <b>Global/meta con enfoque de resolución de problemas:</b> el álgebra se utiliza para encontrar una solución a problemas contextualizados.	Supongamos que el valor de un producto está determinado por la fórmula $f(t)=-20t+200$ , para $t \geq 0$ donde $t$ representa el número de años. 1. ¿El producto va ganando o perdiendo valor con el tiempo? Demuestra gráficamente tu respuesta. 2. ¿Cuánto valdrá el producto a los 3 años? 3. ¿A los cuántos años el producto valdrá \$110?	Un ciclista sale de Chihuahua pedalando a 24 km/h. Un segundo ciclista sale del mismo punto pedalando a 40 km/h. 1. Escribe una expresión algebraica que permita determinar la distancia recorrida por cada ciclista. 2. Si el primer ciclista sale a la 1pm y el segundo sale a las 5pm. ¿A qué hora alcanzará el segundo ciclista al primero? Demuestra gráfica y algebraicamente tu respuesta.
<b>Categoría B</b> <b>Global/meta con enfoque funcional:</b> el álgebra se utiliza para estudiar las relaciones entre las variables en problemas contextualizados.	El valor de un producto A está determinado por la fórmula $f(t)=-10t+200$ , donde $t$ representa el número de años. Supongamos que existe otro producto B cuyo valor está determinado por la fórmula $f(t)=400-30t$ . 1. ¿Qué producto pierde más rápido su valor y en cuánto tiempo perdería todo su valor cada producto? Demuestra gráficamente tu respuesta. 2. ¿Qué producto vale más al cabo de 8 años? 3. ¿Existe un tiempo donde ambos productos valen lo mismo?	Un ciclista sale de Chihuahua pedalando a 24 km/h. Un segundo ciclista sale 5 horas después pedalando a 40 km/h. ¿Cómo alcanzará más rápido el segundo ciclista al primero: disminuyendo las horas que sale después o incrementando su velocidad? Demuestra gráficamente tu respuesta.
<b>Categoría C</b> <b>Global/meta con enfoque lingüístico:</b> el álgebra cobra importancia en los sistemas de representación, simbologías y notaciones en problemas contextualizados.	El valor de un producto A está determinado por la fórmula $f(t)=-10t+200$ y el valor de otro producto B está determinado por la fórmula $f(t)=400-30t$ , donde $t$ representa el número de años. 1. ¿Cuánto vale inicialmente el producto A y cuánto vale inicialmente el producto B? Demuestra gráficamente tu respuesta. 2. ¿Cómo sería la fórmula de un producto C que inicialmente vale \$320 y pierde completamente su valor en 40 años? Muestra su gráfica.	Un ciclista sale de Chihuahua a la 1pm y pedalea a 40 km/h. Después de 2 horas de haber comenzado, el ciclista tiene un fuerte calambre y disminuye su velocidad a 22 km/h. Después de haber recorrido 190km, el camino se vuelve de bajada por lo que su velocidad incrementa a 35km/h. Representa gráficamente su trayecto y la distancia recorrida hasta las 11pm.
<b>Categoría D</b> <b>Global/meta con enfoque generalizador:</b> el álgebra se utiliza para descubrir patrones y estructuras en problemas contextualizados.	El valor de un producto está determinado por la fórmula $f(t) = -25t + 330$ , donde $t$ representa el número de años. La compañía quiere alargar el valor producto el mayor tiempo posible, y propone las siguientes fórmulas: $f(t) = -20t + 330$ o $f(t) = -25t + 400$ ? 1. ¿Cuál opción es mejor? Demuestra gráficamente tu respuesta. 2. ¿Qué consideras que conviene más para que el valor del producto dure más años: tener un valor inicial alto del producto o una pérdida anual baja? Explica tu respuesta.	Un ciclista sale de Chihuahua pedalando a 26 km/h. 1. Un segundo ciclista sale 4 horas después pedalando a 24 km/h. ¿A qué hora alcanzará al primer ciclista? Demuestra gráficamente tu respuesta. 2. Un tercer ciclista sale 2 horas después del primer ciclista pedalando a 26 km/h. ¿A qué hora alcanzará al primer ciclista? Demuestra gráficamente tu respuesta. 3. Un cuarto ciclista sale 3 horas después del primer ciclista. ¿Qué velocidad mínima debería tener para poder alcanzar al primer ciclista? ¿Por qué?

La investigación se llevó a cabo en una escuela privada de nivel socioeconómico medio-alto que imparte álgebra a nivel bachillerato. Participaron seis estudiantes de entre 16 y 17 años cursando el tercer año de bachillerato con un promedio reportado en matemáticas de entre 80 y 64 95. Desmos fue la herramienta tecnológica que se eligió para asistir en la resolución de los reactivos por ser un software que manejaban todos los participantes. Además, Desmos contiene ambos sistemas DGS y CAS lo que permitió manejar diferentes representaciones matemáticas. En sesiones individuales de una hora y media de duración, se le pidió a cada uno de los seis participantes resolver 8 reactivos diseñados. Se utilizaron tres técnicas de recolección de datos: la observación y grabación de la sesión, el análisis de las hojas con sus procedimientos, y la entrevista. Por disposiciones de salud debido a la pandemia por SARS-CoV-2, las observaciones se realizaron de manera remota por videollamada. Se documentaron todas las praxeologías empleadas por cada estudiante durante la resolución de los reactivos y se contrastaron contra las praxeologías esperadas para identificar y explicar cualquier diferencia. Como resultado, para cada uno de los cuatro enfoques del pensamiento algebraico se identificaron las características de los reactivos que permitieron demostrar y evaluar mejor el razonamiento de los estudiantes.

Cada uno de los 8 reactivos tenía entre una a tres preguntas para contestar. En total fueron 102 respuestas registradas en esta investigación. Un primer análisis fue cuantificar la cantidad de respuestas correctas para obtener el porcentaje de respuestas correctas obtenidas con apoyo de la herramienta tecnológica. Partiendo de los resultados generales, si se detectaron diferencias en el desempeño entre las categorías. Los resultados se presentan en orden de mayor a menor porcentaje de respuestas correctas obtenidas con la herramienta Desmos.

**Categoría C – Enfoque Lingüístico:** En los reactivos de esta categoría se le da mayor énfasis al correcto empleo del lenguaje algebraico, los sistemas de representación, sintaxis, simbologías y notaciones. Este enfoque tuvo el mayor porcentaje de respuestas correctas obtenidas con tecnología. La presencia de la expresión algebraica parece que tuvo impacto a favor en el uso de la tecnología. Todas las respuestas correctas del problema Tipo 1 fueron obtenidas con asistencia tecnológica, mientras que en el problema Tipo 2 no se registró ninguna respuesta correcta obtenida con tecnología. La principal aplicación de la herramienta tecnológica fue justificación. Aunque la herramienta tecnológica no asistió en la obtención de la respuesta, les permitió identificar rápidamente cuáles expresiones algebraicas eran incorrectas a partir de sus representaciones gráficas. La aplicación efectiva de Desmos se debió a la facilidad de transformar representaciones algebraicas a gráficas, y permitir la comprobación de sus funciones planteadas. Las praxeologías de los participantes muestran una competencia en la interpretación gráfica. La mayoría de los participantes intentaron convertir el problema a lenguaje algebraico para poderlo graficar. Esto evidencia un desconocimiento de las funcionalidades tecnológicas de graficar usando los datos de sus tablas directamente.

**Categoría D – Enfoque Generalizador:** En los reactivos de esta categoría el álgebra se utiliza para analizar patrones y estructuras. Este enfoque tuvo alto porcentaje de respuestas correctas totales y con asistencia de tecnología. La presencia o ausencia de la expresión algebraica no tuvo impacto marcado en el uso de la tecnología. La principal aplicación de la herramienta tecnológica fue visualización. Desmos facilitó la transformación a representación gráfica para analizar sus respuestas y considerar

soluciones diferentes a las que esperaban. La limitada asistencia tecnológica se debió al desconocimiento de las funcionalidades tecnológicas. Los participantes sustituyeron aleatoriamente diferentes valores en lugar de utilizar un deslizador, lo cual es un método más efectivo y ordenado para identificar patrones.

**Categoría B – Enfoque Funcional:** En los reactivos de esta categoría el álgebra se emplea para estudiar las funciones y las relaciones entre variables. Este enfoque tuvo un moderado porcentaje de respuestas correctas totales y con asistencia de tecnología. La presencia o ausencia de la expresión algebraica no tuvo impacto marcado en el uso de la tecnología. La principal aplicación de la herramienta tecnológica fue visualización. Los estudiantes prefirieron obtener las respuestas mediante procedimientos algebraicos y demostraron tener conocimiento de los algoritmos para la sustitución, evaluación y despeje. Una razón del uso inefectivo de la tecnología fue debido a dificultades para transformar el planteamiento a lenguaje algebraico. Sin embargo, Desmos les permitió que identificar rápidamente cuando sus expresiones algebraicas eran incorrectas basándose en las representaciones gráficas.

**Categoría A – Enfoque de Resolución de Problemas:** En los reactivos de esta categoría el álgebra se emplea para encontrar una solución a problemas contextualizados. Este enfoque fue el que tuvo el menor porcentaje de respuestas correctas obtenidas con tecnología. La presencia o ausencia de la expresión algebraica no tuvo impacto marcado en el uso de la tecnología. La herramienta tecnológica no fue requerida ni representó un beneficio adicional para los participantes. A excepción de obtener la gráfica de la función, los estudiantes se sintieron más cómodos obteniendo la respuesta mediante procedimientos algebraicos. Una razón del poco uso de la tecnología pudo deberse de considerar Desmos una herramienta tecnológica mayormente gráfica y desconocer sus funcionalidades algebraicas.



## 6. Conclusiones y Discusión

9

En una evaluación es fundamental definir las habilidades y conocimientos particulares que se quiere observar y valorar. Kilpatrick (2013) recomienda que se tenga el mayor conocimiento posible sobre lo que los estudiantes son capaces de responder y cómo es más probable que utilicen la tecnología en sus procesos de resolución. De manera general, se concluye que los problemas global meta sirven para evaluar la aplicación de procedimientos y observar cualidades intangibles como el razonamiento, la deducción y la argumentación. En este tipo de problemas la retroalimentación inmediata que otorga la herramienta tecnológica es particularmente útil para dar estructura y justificación a las soluciones de los estudiantes.

Para la evaluación del enfoque algebraico de resolución de problemas, se recomienda evaluar también el manejo de diferentes representaciones matemáticas. El reactivo deberá pedir al estudiante mostrar la capacidad de resolver un problema de manera algebraica, además de demostrar su respuesta en registro gráfico. Para la evaluación del enfoque algebraico funcional, se recomienda evaluar también la capacidad de escribir una función determinada. El reactivo deberá pedir al estudiante mostrar la capacidad de interpretar los componentes y relaciones de una función dada, además de plantear una función o funciones con ciertos criterios relacionados al problema planteado. Para la evaluación del enfoque algebraico lingüístico, se recomienda evaluar también el manejo de diferentes representaciones matemáticas. El reactivo deberá pedir al estudiante mostrar la capacidad de convertir un problema en lenguaje verbal a lenguaje algebraico, además de demostrar su respuesta en el registro gráfico. Para la evaluación del enfoque algebraico generalizador, se recomienda pedir justificación o argumentación de su solución. El reactivo deberá pedir al estudiante escribir y explicar una conjetura inicial sobre la solución al problema planteado, además de mostrar la capacidad de probar su solución planteada en cualquier representación matemática.

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274.
- Bano, M., Zowghi, D., Kearney, M., Schuck, S., y Aubusson, P. (2018). Mobile learning for science and mathematics school education: A systematic review of empirical evidence. *Computers and Education*, 121(February 2017), 30–58.
- Bosch, M. (2015). Doing Research Within the Anthropological Theory of the Didactic: The Case of School Algebra. *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, 51–69.
- Drijvers, P. (2004). Learning Algebra in a Computer Algebra Environment. In *International Journal for Technology in Mathematics Education* (Vol. 11).
- Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, 135–151.
- Gascón, J., y Bosch, M. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249–265).
- Kieran, C. (2006). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*, 21–33.
- Kilpatrick, J. (2013). Introduction to section D: International perspectives on mathematics education. In *Third International Handbook of Mathematics Education*.
- Ronau, R. N., Rakes, C. R., Bush, S. B., Driskell, S. O., Niess, M. L., y Pugalee, D. K. (2014). A Survey of Mathematics Education Technology Dissertation Scope and Quality: 1968–2009. *American Educational Research Journal*, 51(5), 974–1006.